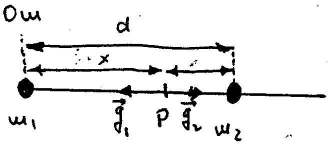
PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS DE CAMPO GRAVITATORIO

1) $m_1 = 5000\ Tm = 5\cdot 10^6\ Kg$

$m_2 = 3000\ Tm = 3\cdot 10^6\ Kg.$

$d = 10m$

(1)



$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|$

Para que los campos se anulen, los módulos deben ser iguales:

$$g_1 = g_2 \Rightarrow \frac{\cancel{G} m_1}{x^2} = \frac{\cancel{G} m_2}{(d-x)^2} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow m_1 (d-x)^2 = m_2 x^2 \Longrightarrow$ Haciendo la raíz cuadrada (y teniendo en cuenta que pueden existir como soluciones tanto con signo + ó −).

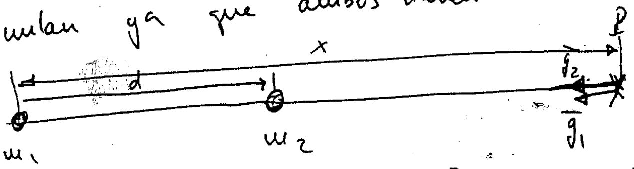
$\rightarrow$ 1) $\sqrt{m_1}(d-x) = \sqrt{m_2}\,x \Longrightarrow \sqrt{m_1}\,d = \left(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}\right)x \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{m_1}\,d}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}$

$\boxed{x = 5'635\ m}$ $\boxed{d-x = 4'365\ m}$

$\rightarrow$ 2) $\sqrt{m_1}(d-x) = -\sqrt{m_2}\,x \Longrightarrow \sqrt{m_1}\,d = \left(\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}\right)x \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{m_1}\,d}{\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}}$

$x = 44'365\ m$ $x-d = 34'365\ m$

En esta segunda solución el punto está a la derecha de m_2, y por tanto los campos son iguales en módulo, pero no se anulan ya que ambos tienen el mismo sentido



$\Big\}\ |\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|$

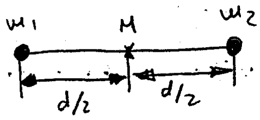
Luego la solución correcta para P es $x = 5'635\ m$ y $(d-x) = 4'365\ m$

(2)

$V_1(P) = \dfrac{-G m_1}{x} = -5'92\cdot 10^{-5}\ J/Kg$ $\quad V_2(P) = \dfrac{-G m_2}{d-x} = -4'586\cdot 10^{-5}\ J/Kg$

$$\boxed{V = V_1(P) + V_2(P) = -1'05\cdot 10^{-4}\ J/Kg}$$

(3)



$\frac{d}{2} = 5\,m$

$$V_1 = -\frac{G m_1}{d/2} = -6'672\cdot 10^{-5}\ J/kg\ ;\quad V_2 = -\frac{G m_2}{d/2} = -4'00032\cdot 10^{-5}\ J/kg$$

$$\boxed{V = V_1 + V_2 = -1'06752\cdot 10^{-4}\ J/kg}$$

(4) $m' = 2\,kg$

$$W_{C\,P\to M} = -\Delta E_p = E_p(P) - E_p(M) = m'V(P) - m'V(M) = m'\left(V(P) - V(M)\right) =$$

$$\boxed{W_{C\,P\to M} = 3'39\cdot 10^{6}\ J}$$

---

(2) $\vec{r}_1\,(3,2,0)\,m \qquad m_1 = 10^4\,kg$

$\vec{r}_2\,(-4,5,1)\,m \qquad m_2 = 2\cdot 10^4\,kg$

(1) $\vec{r}_3\,(0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{13} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (-3,-2,0)\,m \\ |\vec{r}_{13}| &= \sqrt{(-3)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{13} \end{aligned}\right\} \quad \vec{u}_{r_{13}} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0\right)$$

$$* \quad \vec{g}_{13} = -\frac{G m_1}{r_{13}^2}\,\vec{u}_{r_{13}} = \left(4'27\cdot 10^{-8}, 2'85\cdot 10^{-8}\right)\ N/kg$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{23} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (4,-5,-1)\,m \\ |\vec{r}_{23}| &= \sqrt{4^2+(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{42} \end{aligned}\right\} \quad \vec{u}_{r_{23}} = \frac{\vec{r}_{23}}{|\vec{r}_{23}|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}\right)$$

$$* \quad \vec{g}_{23} = -\frac{G m_2}{r_{23}^2}\,\vec{u}_{r_{23}} = \left(-1'96\cdot 10^{-8}, 2'45\cdot 10^{-8}, 4'9\cdot 10^{-9}\right)\ N/kg$$

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_{13} + \vec{g}_{23} = \left(2'309\cdot 10^{-8}, 5'2a8\cdot 10^{-8}, 4'9\cdot 10^{-9}\right)\ N/kg}$$

(2) $\vec{r}_4\,(8,4,-6)\,m \qquad m_4 = 3\,kg.$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{14} &= \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = (8,4,-6) - (3,2,0) = (5,2,-6)\,m \\ |\vec{r}_{14}| &= \sqrt{5^2+2^2+(-6)^2} = \sqrt{65} \end{aligned}\right\} \quad \vec{u}_{r_{14}} = \frac{\vec{r}_{14}}{|\vec{r}_{14}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{65}}, \frac{2}{\sqrt{65}}, \frac{-6}{\sqrt{65}}\right)$$

3

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_{24} = \vec{r}_4 - \vec{r}_2 = (12, -1, -7)\ m \\ |\vec{r}_{24}| = \sqrt{194}\end{array}\right\} \vec{u}_{r_{24}} = \left(\frac{12}{\sqrt{194}}, \frac{-1}{\sqrt{194}}, \frac{-7}{\sqrt{194}}\right)$$

$$\vec{F}_{14} = -\frac{G m_1 m_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{r_{14}} = (-1'9\cdot 10^{-8}, -7'64\cdot 10^{-9}, 2'29\cdot 10^{-8})\ N.$$

$$\vec{F}_{24} = -\frac{G m_2 m_4}{r_{24}^2}\vec{u}_{r_{24}} = (-1'778\cdot 10^{-8}, 1'48\cdot 10^{-9}, 1'037\cdot 10^{-8})\ N.$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} = (-3'69\cdot 10^{-8}, -6'16\cdot 10^{-9}, 3'329\cdot 10^{-8})\ N}$$

(3) Calcularemos la energía potencial de $m_4 = 3\ kg$ cuando está en el punto $A(8,4,-6)\ m = \vec{r}_4$ y $O(0,0,0) = \vec{r}_3$

$$E_p(A) = E_{p_1}(A) + E_{p_2}(A) = -5'357\cdot 10^{-7}\ J$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{p_1}(A) = -\dfrac{G m_1 m_4}{r_{1A} = |\vec{r}_{14}|} = -\dfrac{6'672\cdot 10^{-11}\cdot 10^4\cdot 3}{\sqrt{65}} = -2'48\cdot 10^{-7}\ J \\ E_{p_2}(A) = -\dfrac{G m_2 m_4}{r_{2A} = |\vec{r}_{24}|} = -\dfrac{6'672\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^4\cdot 3}{\sqrt{194}} = -2'87\cdot 10^{-7}\ J \end{array}\right\} = E_p(A)$$

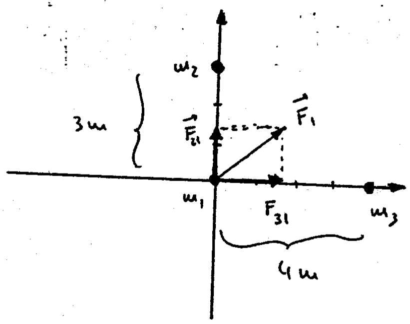
$$\left.\begin{array}{l} E_{p_1}(O) = -\dfrac{G m_1 m_4}{r_{1O} = |\vec{r}_{13}|} = \dfrac{-6'672\cdot 10^{-11}\cdot 10^4\cdot 3}{\sqrt{13}} = -5'55\cdot 10^{-7}\ J \\ E_{p_2}(O) = -\dfrac{G m_2 m_4}{r_{2O} = |\vec{r}_{23}|} = \dfrac{-6'672\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^4\cdot 3}{\sqrt{42}} = -6'177\cdot 10^{-7}\ J \end{array}\right\} = E_p(O)$$

$$E_p(O) = E_{p_1}(O) + E_{p_2}(O) = -1'17\cdot 10^{-6}\ J$$

$$\boxed{W_{NC\ A\to O} = \Delta E_M \underset{\Delta E_c = 0}{=} \Delta E_{p\ A\to O} = E_p(O) - E_p(A) = -6'3717\cdot 10^{-7}\ J}$$

4

3. $m_1 = 1\,Kg \quad \vec{r}_1 = (0,0)\,m$
$m_2 = 2\,Kg \quad \vec{r}_2 = (0,3)\,m$
$m_3 = 3\,Kg \quad \vec{r}_3 = (4,0)\,m$



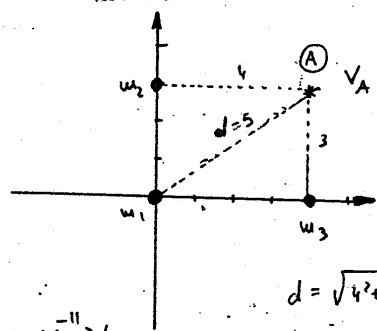
(1)
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

Calcularemos primero los módulos de F_{21} y F_{31} y posteriorment sus componentes

$$F_{21} = \frac{G\, m_1 m_2}{r_{21}^2} = \frac{6'672\cdot 10^{-11}\cdot 1\cdot 2}{3^2} = 1'48\cdot 10^{-11}\,N \quad \text{Por tanto } \vec{F}_{21} = (0,\ 1'48\cdot 10^{-11})\,N$$

$$F_{31} = \frac{G\, m_1 m_3}{r_{31}^2} = \frac{6'672\cdot 10^{-11}\cdot 1\cdot 3}{4^2} = 1'251\cdot 10^{-11}\,N \quad \text{Por tanto } \vec{F}_{31} = (1'251\cdot 10^{-11},\ 0)\,N$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = (1'251\cdot 10^{-11},\ 1'48\cdot 10^{-11})\,N}$$



$d = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

(2) A(4,3)

$$V_A = V_3(A) + V_2(A) + V_1(A)$$

$$V_1(A) = \frac{-G\,m_1}{d = |\vec{r}_A|} = \frac{-6'672\cdot 10^{-11}\cdot 1}{5} = -1'3344\cdot 10^{-11}\,J/Kg$$

$$V_2(A) = \frac{-G\,m_2}{r_{2A}} = \frac{-6'672\cdot 10^{-11}\cdot 2}{4} = -3'336\cdot 10^{-11}\,J/Kg$$

$$V_3(A) = \frac{-G\,m_3}{r_{3A}} = \frac{-6'672\cdot 10^{-11}\cdot 3}{3} = -6'672\cdot 10^{-11}\,J/Kg$$

$$V_A = V_1(A) + V_2(A) + V_3(A) =$$

$$\boxed{V_A = -1'13424\cdot 10^{-10}\,J/Kg}$$

(3)
$$W_{C_{A\to\infty}} = -\Delta E_{p_{A\to\infty}} = E_p(A) - \cancel{E_p(\infty)}^{0} = E_p(A) = m_4 V_A =$$

$m_4 = 4\,Kg$

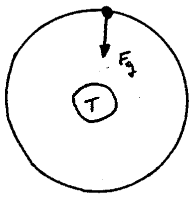
$$\boxed{W_{C_{A\to\infty}} = m_4 V_A = -4'53696\cdot 10^{-10}\,J}$$

5

(4) $T = 1'5 \text{ horas} = 5\,400 \text{ s}$

$GM = g_0 R_T^2$ → utilizaremos esta relación

(1)



(2) $F_g = m a_n = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$

$\frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{4\pi^2}{T^2} r \rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3}$ 3ª ley de Kepler

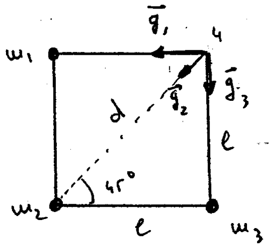
$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T^2} = 6\,652\,848'4 \text{ m}}$

(3) $F_g = m a_n \Longrightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Longrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7\,740'94 \text{ m/s}}$

o bien $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} \cdot r =$

(5) $l = 2 \text{ m}$

$m_1 = m_2 = m_3 = m = 1000 \text{ kg}$



$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{8} \text{ m}$

$l = 2 \text{ m}$

(1) $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$

Calcularemos los módulos y posteriormente las componentes

$g_1 = \frac{G m_1}{r_{14}^2} = \frac{Gm}{l^2} \Longrightarrow \vec{g}_1 = \left(-\frac{Gm}{l^2}, 0\right) = (-1'668 \cdot 10^{-8}, 0) \text{ N/kg}$

$g_3 = \frac{G m_3}{r_{34}^2} = \frac{Gm}{l^2} \Longrightarrow \vec{g}_3 = \left(0, -\frac{GM}{l^2}\right) = (0, -1'668 \cdot 10^{-8}) \text{ N/kg}.$

$g_2 = \frac{G m_2}{r_{24}^2} = \frac{Gm}{d^2} \Longrightarrow \vec{g}_2 = \left(-\frac{Gm}{d^2} \cos 45, -\frac{GM}{d^2} \operatorname{sen} 45\right) =$

$\vec{g}_2 = (-5'897 \cdot 10^{-9}, -5'897 \cdot 10^{-9}) \text{ N/kg}$

$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = (-2'2577 \cdot 10^{-8}, -2'2577 \cdot 10^{-8}) \text{ N/kg}}$

(2) $V = V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{G m_1}{r_{14}} + \left(-\frac{G m_2}{r_{24}}\right) + \left(-\frac{G m_3}{r_{34}}\right) =$

$\boxed{V = -\frac{Gm}{l} - \frac{Gm}{d} - \frac{Gm}{l} = -2\frac{Gm}{l} - \frac{Gm}{d} = -9'03 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}}$

6

(3) $\boxed{W_{NC_{4\to\infty}} = \Delta E_M} = \Delta E_{p_{4\to\infty}} = E_p(\infty) - E_p(4) = -m' \cdot V(4) =$ ($\Delta E_c = 0$)

$m' = 3\ Kg$

$= -3(-9'03 \cdot 10^{-8}) = \boxed{+2'709 \cdot 10^{-7}\ J}$

6 $m = 1000\ Kg$ $\quad GM = g_0 R_T^2 = 3'9865 \cdot 10^{14}$ (S.I.)

Órbita geoestacionaria $\Longrightarrow T = 24\ h = 86400\ s$

(1) Por la fórmula del ejercicio 4 $\quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T^2} = 42.242.954'42\ m \Longrightarrow \boxed{h = r - R_T = 35.864.954'42\ m}$

(2) $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_0^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 - \frac{GMm}{r} =$

$\boxed{E_M = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -1'887 \cdot 10^{10}\ J}$

(3) La fuerza gravitatoria, en módulo

$\boxed{F_g = \frac{G M_T m}{r^2} = 893'6\ N}$

7 $g = 6\ m/s^2$
$\rho = 3500\ Kg/m^3$

$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

(1) $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \cdot \rho \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = G\rho\frac{4}{3}\pi R$ $\quad$ Por tanto

$\boxed{R = \frac{g}{G\rho\frac{4}{3}\pi} = 6\,133\,926'378\ m}$

$\boxed{M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = 3'38 \cdot 10^{24}\ Kg}$

7

(2) $\boxed{v_e = \sqrt{\frac{GM\cdot 2}{r}} = 8579'46 \ m/s}$

(3) $\boxed{g(r=h+R) = g = \frac{GM}{(h+R)^2} = 4'436 \ m/s}$

(4) HECHO EN TEORÍA.

8

(1) $\boxed{g_{0_{marte}} = \frac{G M_{mart}}{R^2_{mart}} = 3'886 \ N/Kg}$

(2) $\boxed{E_p = -\frac{G M_{Marte} m}{R_{marte}} = -1'935\cdot 10^{10} \ J}$

(3) $\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 G M_{Marte}}{R_{Marte}}} = 5079'74 \ m/s}$

9

$T = 27'2$ días $= 2350080$ s

(1) Por la 3ª Ley de Kepler (ver ejer. 4) $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\cdot r^3$

$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 382\,593\,524'1 \ m}$

(2) $\boxed{F_g = \frac{G M_T M_L}{r^2} = \frac{G \frac{1}{81} M_T^2}{r^2} = 2'026\cdot 10^{20} \ N}$

(3) $\boxed{g_{0_{Luna}} = \frac{GM_L}{R_L^2} = \frac{G\frac{1}{81}M_T}{R_L^2} = 1'93 \ m/s^2}$

Por cinemática $v^2 - \cancel{v_0^2} = 2as \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2as} = \sqrt{2g_{0_{Luna}}\cdot h} = 6'21 \ m/s}$

10

$m = 1000$ Kg
$h_1 = 500$ Km
$T_2 = 3$ h $= 10800$ s
$GM_T = g_0 R_T^2 = 3'9865\cdot 10^{14}$ (S.I.)

(a) $\boxed{v_0(h_1) = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM}{(h_1+R_T)}} = 7613'19 \ m/s}$

(b) $T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_2^3 \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{GM_T\cdot T_2^2}{4\pi^2}} = 10560738'6$ m

$\boxed{h_2 = r_2 - R = 4182738'6 \ m}$

8

c) $\boxed{v_0(h_2) = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = 6143'99\ m/s}$

d) Cuando nos pregunta por la energía para pasar de una órbita a otra, se nos está preguntando por el trabajo (no conservativo) que tendríamos que aplicar al satélite para que pase de una órbita a otra.

$$W_{NC} = \Delta E_M = E_M(2) - E_M(1) = E_C(2) + E_P(2) - \left(E_C(1) + E_P(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2} - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{GM}{r_2} - \frac{GMm}{r_2} - \left(\frac{1}{2} m \frac{GM}{r_1} - \frac{GMm}{r_1}\right) =$$

$$= -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 1'01 \cdot 10^{10}\ J$$

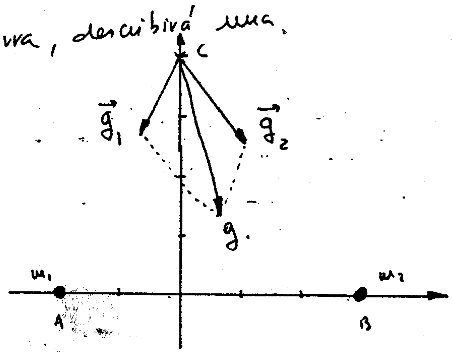
e) la $v_0(h_1) = 7613'19\ m/s$ y la $v_e(h_1) = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} = 10766'67\ m/s$

Si le damos una $v = 10800\ m/s$ que es mayor que la v_e, el satélite ya no volverá a la Tierra, describirá una abierta.

11) $m_1 = 100\ Kg$ $\quad \vec{r}_A(-2,0)\ m$

$m_2 = 150\ Kg$ $\quad \vec{r}_B(3,0)\ m$

$\vec{r}_C(0,4)\ m$



(a)

$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0,4) - (-2,0) = (2,4)\ m$

$|\vec{r}_{AC}| = \sqrt{20} \Rightarrow \vec{u}_{r_{AC}} = \left(\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

$\vec{g}_1 = -\frac{G m_1}{r_{AC}^2} \vec{u}_{r_{AC}} = \left(-1'49 \cdot 10^{-10}, -2'98 \cdot 10^{-10}\right) N/Kg$

$\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (0,4) - (3,0) = (-3,4)\ m$

$|\vec{r}_{BC}| = 5 \Rightarrow \vec{u}_{r_{BC}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\vec{g}_2 = -\frac{G m_2}{r_{BC}^2} \vec{u}_{r_{BC}} = \left(2'4 \cdot 10^{-10}, -3'2 \cdot 10^{-10}\right) N/Kg$

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \left(9'1 \cdot 10^{-11}, -6'18 \cdot 10^{-10}\right) N/Kg}$$

9

(b) $m' = 10\ kg$.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g} = (9'1\cdot 10^{-10}, -6'18\cdot 10^{-9})\ N}$$

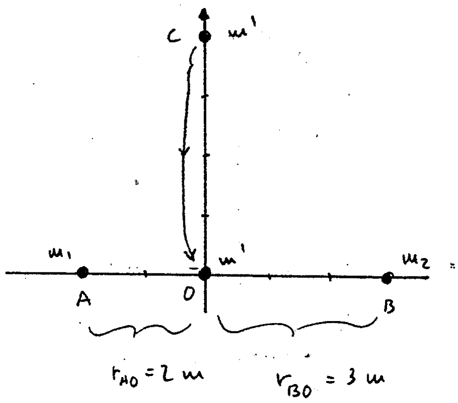
(c) $V = V_1(c) + V_2(c)$

$$V_1(c) = -\frac{G m_1}{r_{AC}} = -1'49\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$V_2(c) = -\frac{G m_2}{r_{BC}} = -2'0016\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$\boxed{V = V_1(c) + V_2(c) = -3'49\cdot 10^{-9}\ J/kg}$$

(d) $$\boxed{E_p(C) = E_{p_1}(c) + E_{p_2}(c) = m'\,V(c) = -3'49\cdot 10^{-8}\ J}$$



$$E_p(0) = E_{p_1}(0) + E_{p_2}(0)$$

$$E_{p_1}(0) = -\frac{G m_1 m'}{r_{AO}} = -3'336\cdot 10^{-8}\ J$$

$$E_{p_2}(0) = -\frac{G m_2 m'}{r_{BO}} = -3'336\cdot 10^{-8}\ J$$

$$\boxed{E_p(0) = -6'672\cdot 10^{-8}\ J}$$

(e) $$\boxed{W_{\substack{ac \\ C\to O}} = \Delta E_M = \underset{\Delta E_C = 0}{} \Delta E_{\substack{p \\ C\to O}} = E_p(0) - E_p(C) = -3'178\cdot 10^{-8}\ J}$$

10

12

(a) Sí, aunque estemos a 10.000 Km de la Tierra no podemos afirmar que "ya no estamos sometidos a los efectos de la atracción terrestre", ya que la fuerza de atracción terrestre es de alcance infinito (es decir nunca es cero), (sólo cuando la distancia a la Tierra es infinita).

$$F = \frac{G M_T m}{r^2}$$

Es cierto que con la velocidad de 13 Km/s el cohete a superado la velocidad de escape (y si no se produjeran aceleraciones externas) el cohete ya no regresaría a la Tierra

(Para una $h = 10.000$ Km la $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{(h+R)}} = 6'9$ Km/s)

(b) La velocidad de escape, calculada en el apartado anterior.

13

(a) Radio del Planeta → R

(b) Radio de la órbita del satélite → r

(c) Periodo del satélite → T

(1) ¿masa del planeta? Sí, a partir de la 3ª ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \Longrightarrow \boxed{M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}}$$

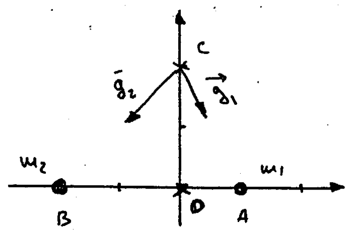
(2) ¿Masa del satélite? No, me faltan datos $F = \frac{GMm}{r^2}$?
ya que no conozco la Fuerza de atracción

(3) ¿aceleración de la gravedad? Sí, conociendo la masa del planeta calculada en el apartado (1) y con la fórmula: $\boxed{g_0 = \frac{GM}{R^2}}$

14 = 10

(15) El ejercicio es muy parecido al 11, pero con otros datos.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 100\ kg \quad A(1,0)\ m \\ m_2 = 200\ kg \quad B(-2,0)\ m \end{array}\right\} \ C(0,2)\ m$$



(a) $\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (2,2)\ m$ | $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (-1,2)\ m$

$|\vec{r}_{BC}| = \sqrt{8} \rightarrow \vec{u}_{r_{BC}} = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right)$ | $|\vec{r}_{AC}| = \sqrt{5} \rightarrow \vec{u}_{r_{AC}} \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\vec{g}_2 = -\frac{G m_2}{r_{BC}^2}\vec{u}_{r_{BC}} = (-1'179\cdot 10^{-9}, -1'179\cdot 10^{-9})\ N/kg$$

$$\vec{g}_1 = -\frac{G m_1}{r_{AC}^2}\vec{u}_{r_{AC}} = (5'968\cdot 10^{-10}, -1'1935\cdot 10^{-9})\ N/kg$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\boxed{\vec{g} = (-5'8\cdot 10^{-10}, -2'37\cdot 10^{-9})}$$

(b) $\boxed{\vec{F} = m'\vec{g} = (-5'8\cdot 10^{-10}, -2'37\cdot 10^{-9})\ N}$

$m' = 1\,kg$

(c) $V(C) = V_1(C) + V_2(C)$

$$V_1(C) = \frac{-G m_1}{r_{AC}} = -2'98\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$V_2(C) = \frac{-G m_2}{r_{BC}} = -4'7178\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$\boxed{V(C) = -7'7\cdot 10^{-9}\ J/kg}$$

(d) $V(O) = V_1(O) + V_2(O)$

$$V_1(O) = \frac{-G m_1}{r_{AO} = 1m} = -6'672\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

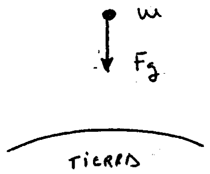
$$V_2(O) = -\frac{G m_2}{r_{BO} = 2m} = -6'672\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$\boxed{V(O) = -1'3344\cdot 10^{-8}\ J/kg}$$

(e) $\boxed{W_{FC\ C\to O} = \Delta E_M = \Delta E_{p\ C\to O}} = E_p(O) - E_p(C) = m'(V(O) - V(C)) = \boxed{-5'64\cdot 10^{-9}\ J}$

$\Delta E_C = 0$

16 12



La fuerza con que una masa m es atraída por la tierra es en módulo

$$F = \frac{G M_T m}{r^2}$$

Donde $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ (S.I.) cte de grav. Univ.
M_T: masa de la Tierra
m: " del cuerpo (gravitatoria)
r: distancia entre m y el centro de la Tierra

Además por la 2ª ley de Newton: $F = m \cdot a$ (masa inercial), por tanto, al coincidir las masas gravitatoria e inercial:

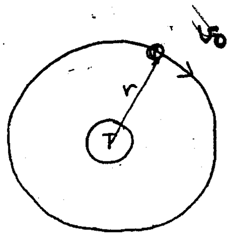
$$F = \frac{G M_T \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\, a \Longrightarrow \underline{\underline{a = \frac{G M_T}{r^2}}}$$

La aceleración con que caen los cuerpos es $\frac{G M_T}{r^2}$, que como vemos no depende de la masa del cuerpo. Para puntos en la superficie Terrestre la aceleración es $a = \frac{G M_T}{R_T^2}$, este valor es aprox. $9'8\ m/s^2$ y es tb. aproximadamente cte (depende de la latitud y de la altitud) pero con variaciones muy pequeñas siempre que estemos en la superficie Terrestre)

Podemos decir que aunque con cuerpos más pesados la fuerza de atracción es mayor, también para acelerarlos hace falta más fuerza y ambos efectos se compensan de tal forma que la aceleración de la gravedad no depende de la masa del cuerpo.

(13)

(17)



$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$E_p = \frac{-GM_T m}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$r = R_T + h$

Si calculamos el cociente entre ambas.

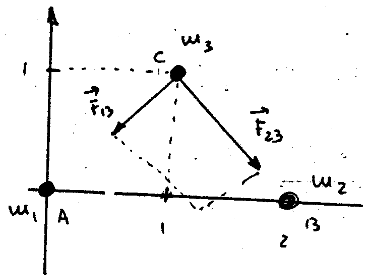
$$\boxed{\frac{E_p}{E_c} = \frac{-\frac{\cancel{GM_T m}}{\cancel{r}}}{\frac{\cancel{GM_T m}}{2\cancel{r}}} = -2}$$

Es decir $\underline{E_p = -2E_c}$

(18) $m_1 = 1\,Kg$. $\vec{r}_A\,(0,0)\,m$

$m_2 = 2\,Kg$ $\vec{r}_B\,(2,0)\,m$

$\vec{r}_C\,(1,1)\,m$ $m_3 = 3\,Kg$



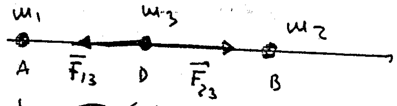
(a)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (1,1) - (0,0) = (1,1)\,m \\ |\vec{r}_{AC}| = \sqrt{2} \longrightarrow \vec{u}_{r_{AC}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} \vec{F}_{13} = -\frac{G m_1 m_3}{r_{AC}^2}\,\vec{u}_{r_{AC}} = (-7'076\cdot10^{-11}, -7'076\cdot10^{-11})\,N.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (1,1) - (2,0) = (-1,1)\,m \\ |\vec{r}_{BC}| = \sqrt{2} \longrightarrow \vec{u}_{r_{BC}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} \vec{F}_{23} = -\frac{G m_2 m_3}{r_{BC}^2}\,\vec{u}_{r_{BC}} = (1'42\cdot10^{-10}, -1'42\cdot10^{-10})\,N$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (7'076\cdot10^{-11}, -2'123\cdot10^{-10})\,N}$$

(b)



$\underbrace{}_{|\vec{r}_{AD}| = 1m}$ $\underbrace{}_{|\vec{r}_{BD}| = 1m}$

$\vec{r}_D\,(1,0)\,m$ $m_3 = 3\,Kg$

Trabajemos en una dimensión. $F_{23} = \frac{G m_2 m_3}{r_{BD}^2} = 4'0032\cdot10^{-10}\,N$

$\vec{F}_{23} = 4'0032\cdot10^{-10}\,\vec{i}\,\,N$

14

$$F_{13} = \frac{G\, m_1 m_3}{r_{AD}^2} = 2'0016 \cdot 10^{-10}\ N \implies \vec{F}_{13} = -\,2'0016 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} \cdot N$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = 2'0016 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ \ N}$$

19 Si el sol pierde las $\frac{3}{4}$ partes de su masa, le queda sólo $\frac{1}{4} M_S$, es decir

$$\underline{M'_S = \frac{1}{4} M_S}$$

La Tierra, incialmente mantendrá la velocidad que tenía (para una órbita circular) $v_0 = \sqrt{\frac{G\, M_S}{r}}$. Por tanto mantiene su energía cinética pero desciende bruscamente su energía potencial.

¿En esta nueva circunstancia, la velocidad (y por tanto la energía cinética) de la Tierra es suficiente para describir una trayectoria abierta (es decir que no regrese)?

ESTUDIÉMOSLO:

En la nueva situación la velocidad de escape de un planeta que esté a una distancia r del Sol será:

$$v'_e = \sqrt{\frac{2G M'_S}{r}} = \sqrt{\frac{2G\, \frac{1}{4} M_S}{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{G\, M_S}{r}} = 0'707 \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

Como la Tierra tiene una $v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}} > v'_e$, vemos que "escapará" y que por tanto mantendría una trayectoria abierta y no regresaría a las proximidades del Sol.

(15)

(20) $m = 600\,kg$
¿H?
$v_0 = 5000\,m/s$

(a) Conociendo la vel. orbital $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$r = \frac{GM}{v_0^2} \Rightarrow \boxed{h = r - R_T = \frac{GM}{v_0^2} - R_T = 9.568.122'528\,m}$$

$(r = 15.946.122'53\,m)$

Energía para subirlo a una altura H (y dejarlo con $v=0$)

(b) $W_{nc} = \Delta E_M = \underbrace{\Delta E_p}_{\text{Suponemos } \Delta E_c = 0} = E_p(H) - E_p(h=0) =$

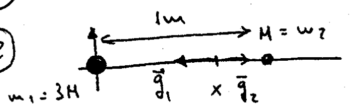
$$\boxed{W_{nc} = -\frac{GMm}{r} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) = 2'25 \cdot 10^{10}\,J}$$

(c) Energía para subirlo a una altura H y dejarlo orbitando con $v = v_0$

$$\boxed{W_{nc} = \Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p = E_c(H) - \underbrace{E_c(h=0)}_{0} + E_p(H) - E_p(h=0)}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \underbrace{E_p(H) - E_p(h=0)}_{\text{Hecho en el apartado anterior}} = \boxed{3 \cdot 10^{10}\,J}$$

(21) HECHO EN CLASE

(22) 

Para que sea nulo, los campos tienen que ser iguales en módulo $g_1 = g_2$ es decir

$$\frac{\cancel{G} \cdot 3\cancel{M}}{x^2} = \frac{\cancel{G}\cancel{M}}{(1-x)^2} \Rightarrow 3(1-x)^2 = x^2$$

Hacemos la raíz cuadrada, pero tendremos 2 posibles soluciones:

1ª Sol. $\sqrt{3}(1-x) = x \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}x = x \Rightarrow (\sqrt{3}+1)x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$\underline{x = 0'634\,m}$ $\quad d - x = 0'366\,m.$

16

2ª sol $\sqrt{3}(\cancel{d}-x) = -x \implies (\sqrt{3}-1)x = \sqrt{3} \implies x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2'366\ m$

Como ya indicamos en el ejercicio 1, esta solución NO ES VALIDO, ya que en este caso el punto esta a la derecha de la masa M en este punto los vectores campo no se anulan ya que tienen el mismo sentido.

23) $r_M = 1'486\ r_T$

Utilizaremos la 3ª ley de Kepler $T_T^2 = K r_T^3$; $T_M^2 = K r_M^3$

Dividiendo ambas igualdades.

$$\frac{T_M^2}{T_T^2} = \frac{r_M^3}{r_T^3} = \frac{(1'486)^3 \cancel{r_T^3}}{\cancel{r_T^3}} \implies \frac{T_M^2}{T_T^2} = (1'486)^3 \implies$$

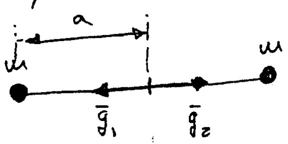
$$\frac{T_M}{T_T} = \sqrt{(1'486)^3} \implies \boxed{T_M = \sqrt{(1'486)^3}\ T_T} = \boxed{1'811\ T_T}$$

El año marciano es 1'811 años terrestres.

24 ver libro página 173.

¿Existe algún punto donde se anule el campo?

Sí, en el punto medio del segmento que une las masas



$\vec{g}_1 = -\dfrac{Gm}{a^2}\vec{i}$ $\qquad \bar{g}_2 = \dfrac{Gm}{a^2}\vec{i}$

$\vec{g} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 = 0$

¿Existe algun punto donde se anule el potencial?

NO, el potencial es $V = -\dfrac{Gm}{r}$, siempre un escalar negativo, por tanto cuando sumemos los 2 potenciales no se anularán (a no ser que estemos en el infinito ya que allí los potenciales son nulos).

25 Debido a que tanto el astronauta como el satélite tienen el mismo movimiento y sufren la misma aceleración $\left(g = \dfrac{GM}{r^2}\right)$ (caída libre)

$\boxed{g = \dfrac{GM}{r^2} = 9'67\ m/s^2}$ vemos que es menor de $9'8\ m/s^2$ pero por supuesto no es nulo.